Uitwerking Tentamen Signalen & Systemen

Vrijdag 3 april 2009, 9:00-12:00 uur

Opgave 1: signalen en spectra

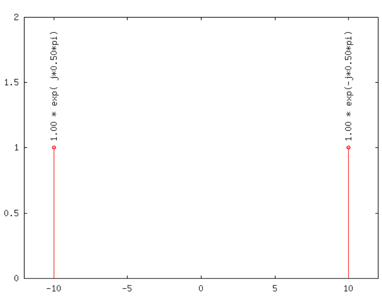
(a) Het eerste signaal is een cosinus met amplitude 3 en fase $\frac{\pi}{2}$. Eén volledige slingering wordt doorlopen in 1 second. De frequentie is dus 1Hz.
Het tweede signaal is een cosinus met amplitude 1 en fase 0. Drie volledige slingering worden doorlopen in 2 seconden. De frequentie is dus 1.5Hz.
Het derde signaal is het product van de eerste twee signalen. Samengevat,

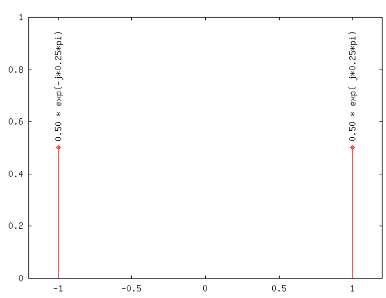
$$x_1(t) = 3\cos(2\pi t + \pi/2), \quad x_2(t) = \cos(3\pi t), \quad x_3(t) = 3\cos(2\pi t + \pi/2)\cos(3\pi t).$$

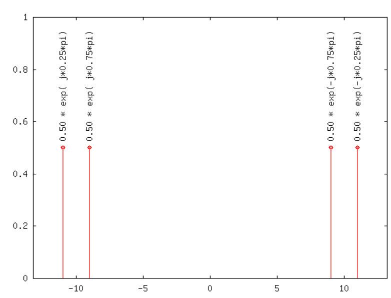
(b) Met de formule van Euler (13) vinden we

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2\sin(2\pi 10t) = 2\cos(2\pi 10t - \pi/2) = e^{-j\pi/2}e^{j20\pi t} + e^{j\pi/2}e^{-j20\pi t} \\
y(t) &= \cos(2\pi t + \pi/4) = \frac{e^{j\pi/4}}{2}e^{j2\pi t} + \frac{e^{-j\pi/4}}{2}e^{-j2\pi t} \\
z(t) &= x(t)y(t) = (e^{-j\pi/2}e^{j20\pi t} + e^{j\pi/2}e^{-j20\pi t})(\frac{e^{j\pi/4}}{2}e^{j2\pi t} + \frac{e^{-j\pi/4}}{2}e^{-j2\pi t}) \\
&= \frac{e^{-j\pi/4}}{2}e^{j22\pi t} + \frac{e^{-j3\pi/4}}{2}e^{j18\pi t} + \frac{e^{j3\pi/4}}{2}e^{-j18\pi t} + \frac{e^{j\pi/4}}{2}e^{-j22\pi t}
\end{aligned}$$

(c) De onderstaande 3 figuren zijn de spectra van respectievelijk $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$:







(d) Dit effect heet het Doppler-effect. Dit effect laat zich makkelijker uitleggen vanuit de waarnemer dan vanuit de motor, hoewel alles natuurlijk symmetrisch is. Het naderen van de motor kan dus ook uitgelegd worden met het naderen van de waarnemer. Als de waarnemer naar de bron toe beweegt, passeren er nu meer golffronten per seconde dan wanneer hij stil is blijven staan. De waargenomen frequentie is dus hoger dan die van de bron. Als de waarnemer de bron voorbij is, halen de golven hem in. Er passeren hem per seconde nu minder golffronten dan de bron heeft uitgezonden, en dus neemt de waarnemer een lagere frequentie waar.

Opgave 2: LTI-Systemen

(a) LTI staat voor Lineair en TijdsInvariant. Het systeem F_0 is lineair als geldt: $F_0(\alpha x) = \alpha(F_0(x))$ en $F_0(x + y) = F_0(x) + F_0(y)$ voor ieder signaal x, y en scalair α. Het systeem F_0 heet tijdsinvariant als een verschuiving van x met k samples een verschuiving van de uitvoer levert met k samples (voor alle signalen x en gehele k).

(b+c) Het is handig om vraag (b) en (c) in één keer te beantwoorden. Gegeven is dat het systeem LTI is, dus we kunnen een impulse response $h[n]$ bepalen. De lengte van het uivoersignaal is 8 samples lang, terwijl die van de invoer 5 samples lang is. De impulse respons moet dus 4 samples lang zijn (omdat $5 + 4 - 1 = 8$). Stel nu dat $h = \{a, b, c, d\}$. Voor de convolutie van x met h vinden we dan:

$$y = x*h = \{1, 0, -1, 0, 1\}*\{a, b, c, d\} = \{a, b, c-a, d-b, a-c, b-d, c, d\} = \{4, 2, 0, 0, 0, 0, 4, 2\}$$

Er moet dus gelden $a = 4$, $b = 2$, $c = 4$ en $d = 2$. De gevraagde unit impulse response is dus $h[n] = 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 2\delta[n-3]$.

Een systeem is causaal als de uitvoer op een zeker tijdstip alleen afhangt van de huidige en vorige waarden van de invoer. Omdat we nu de differentievergelijking $y[n] = 4x[n]+2x[n-1]+4x[n-2] + 2x[n-3]$ hebben gevonden, kunnen we duidelijk zien dat het systeem causaal is.

(d) De convolutie van z met h_1 wordt gegeven door:

$$h_1 * z = \{4, 2, 0, 4, 2\} * \{1, 1, 1, -1, 0, -1\} = \{4, 6, 6, 2, 4, 2, -4, -2, -4, -2\}$$

Dus de uitvoer is:

$$4\delta[n]+6\delta[n-1]+6\delta[n-2]+2\delta[n-3]+4\delta[n-4]+2\delta[n-5]-4\delta[n-6]-2\delta[n-7]-4\delta[n-8]-2\delta[n-9]$$

(e) Het signaal $s[n] = (-1)^n = \{\ldots, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$ zal door dit filter volledig verwijderd worden, immers $h_1[n] = \{4, 2, 0, 4, 2\}$ is van oneven lengte met in het midden de waarde 0. In de convolutiesom zal dus 4 tegen -4 wegvallen, en 2 tegen -2.

(f) Invullen in formule (30) geeft het antwoord (met $M = 4$):

$$H_1(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^{M} h[k]e^{-j\hat{\omega}k} = 4 + 2e^{-j\hat{\omega}} + 4e^{-j3\hat{\omega}} + 2e^{-j4\hat{\omega}}$$

(g) Deze vraag kun je op twee manieren beantwoorden, namelijk door vermenigvuldiging van de frequentie responses gevolgd door het aflezen van de impulse response, of via de convolutie van de impuls responses en het construeren van het frequentie response polynoom. In deze uitwerking kies ik de tweede variant (minder schrijfwerk). De impuls respons van het samengestelde systeem wordt gegeven door de convolutie van de separate impulse responses, m.a.w.

$$h_3[n] = h_1[n] * h_2[n] = \{4, 2, 0, 4, 2\} * \{1, 2, 1\} = \{4, 10, 8, 6, 10, 8, 2\}$$

De bijbehorende frequentie response is dan:

$$H_3(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^{6} h_3[k]e^{-j\hat{\omega}k} = 4 + 10e^{-j\hat{\omega}} + 8e^{-j2\hat{\omega}} + 6e^{-j3\hat{\omega}} + 10e^{-j4\hat{\omega}} + 8e^{-j5\hat{\omega}} + 2e^{-j6\hat{\omega}}$$

Opgave 3: Fourier analyse
(a) Dit is eenvoudig in te zien met de observatie dat de DC-component het gemiddelde over één periode is. Aangezien de tweede helft van de periode ($T_0 \leq t < T_0$) gelijk is aan de eerste helft met een minteken is het gemiddelde dus 0.
Je kunt dit ook formeel aantonen door formule (23) toe te passen voor $k = 0$:

$$DC = a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)dt + \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} x(t)dt$$

De tweede integraal kunnen we nu verder uitwerken tot

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t+T_0/2)dt = -\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)dt$$

M.a.w deze integraal valt tegen de eerste weg. De totale som is dus nul.

(b) We werken formule (23) uit voor a_{2k}:

$$a_{2k} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi 2kt/T_0}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)e^{-j4\pi kt/T_0}dt + \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} x(t)e^{-j4\pi kt/T_0}dt$$

Ook nu werken we de tweede integraal uit:

$$\int_{T_0/2}^{T_0} x(t)e^{-j4\pi kt/T_0}dt = \int_0^{T_0/2} x(t+T_0/2)e^{-j4\pi k(t+T_0/2)/T_0}dt = -\int_0^{T_0/2} x(t)e^{-j4\pi kt/T_0}e^{-j2\pi k}dt$$

Wegens $e^{-j2\pi k} = 1^k = 1$ hebben we nu dezelfde integraal (met een minteken) gevonden als die in de eerste term. De conclusie is dus dat $a_{2k} = 0$ voor alle gehele k.
(c) We maken gebruik van formule (22): $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j2\pi kt/T_0}$. Aangezien de afgeleiden van een som gelijk is aan de som van de afgeleiden geldt dus:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}(a_k e^{j2\pi kt/T_0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2jk\pi a_k/T_0 e^{j2\pi kt/T_0}).$$

De Fourier-coëfficienten van y zijn dus inderdaad $b_k = 2jk\pi a_k/T_0$.

(d) Het signaal $x(t)$ is periodiek met periode $T_0 = 2$. Opnieuw gebruiken we formule (23). Tevens is het handig om $\alpha = -j2\pi k/T_0 = -j\pi k$ te introduceren:

$$a_k = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)e^{\alpha t}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 te^{\alpha t}dt + \frac{1}{2}\int_1^2 (2-t)e^{\alpha t}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 te^{\alpha t}dt + \int_1^2 e^{\alpha t}dt - \frac{1}{2}\int_1^2 te^{\alpha t}dt$$

Alle integralen zijn nu van de vorm zoals te vinden op het formuleblad (formules 15 + 16):

$$a_k = \left[\frac{\alpha t - 1}{2\alpha^2}e^{\alpha t}\right]_0^1 + \left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_1^2 - \left[\frac{\alpha t - 1}{2\alpha^2}e^{\alpha t}\right]_1^2 = \frac{[(\alpha t - 1)e^{\alpha t}]_0^1 + [2\alpha e^{\alpha t}]_1^2 - [(\alpha t - 1)e^{\alpha t}]_1^2}{2\alpha^2}$$

Na enig rekenen vinden we dan:

$$a_k = \frac{(\alpha-1)e^{\alpha}+1+2\alpha e^{2\alpha}-2\alpha e^{\alpha}-(2\alpha-1)e^{2\alpha}+(\alpha-1)e^{\alpha}}{2\alpha^2} = \frac{e^{2\alpha}-2e^{\alpha}+1}{2\alpha^2} = \frac{2-2(-1)^k}{2\alpha^2}$$

Hierbij gebruikten we $e^{\alpha} = e^{-j\pi k} = (e^{-j\pi})^k = (-1)^k$ en $e^{2\alpha} = e^{-j2\pi k} = (e^{-j2\pi})^k = 1^k = 1$. Voor k even vinden we dus $a_k = 0$, terwijl $a_k = \frac{2-2(-1)^k}{2\alpha^2} = \frac{4}{2j^2\pi^2k^2} = \frac{-2}{\pi^2k^2}$ voor oneven k. Voor $k = 0$ geldt $a_k = 0$ omdat het gemiddelde over één periode 0 is.
(e) Er geldt dat $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ en dus kunnen we gebruik maken van onderdeel (c).

$$b_k = \begin{cases} \frac{-4jk\pi}{2\pi^2k^2} = \frac{-2j}{\pi k} = \frac{2}{j\pi k} & \text{voor } k = \pm1, \pm3, \pm5, \ldots \\ 0 & \text{voor } k = 0, \pm2, \pm4, \pm6, \ldots \end{cases}$$

Opgave 4: z-transformaties
(a) Met formule 34 van het formuleblad vinden we:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{4} h[k]z^{-k} = 1 - (1+\sqrt{2})z^{-1} + (2+\sqrt{2})z^{-2} - (1+\sqrt{2})z^{-3} + z^{-4}$$

(b) Met de formule van Euler (13) vinden we $x[n] = \cos(\frac{n\pi}{4}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{jn\pi}{4}} + e^{\frac{-jn\pi}{4}})$. M.a.w. $x[n] = \frac{1}{2}(x_0[n]+x_1[n])$ met $x_0[n] = (e^{\frac{j\pi}{4}})^n$ en $x_1[n] = (e^{\frac{-j\pi}{4}})^n$. Als het filter $x[n]$ verwijdert dan moet het filter x_0 en x_1 verwijderen, en dus moeten $z_0 = e^{\frac{j\pi}{4}}$ en $z_1 = e^{\frac{-j\pi}{4}}$ wortels (nulpunten) van $H(z)$ zijn, en dus moet $H(z)$ te schrijven zijn als $H(z) = H_0(z)H_1(z)$ met $H_0(z) = (1 - z_0z^{-1})(1 - z_1z^{-1})$ en $H_1(z)$ een rest-polynoom in z^{-1}. We werken eerst $H_0(z)$ uit:

$$H_0(z) = (1 - e^{\frac{j\pi}{4}}z^{-1})(1 - e^{\frac{-j\pi}{4}}z^{-1}) = z^{-2} - (e^{\frac{j\pi}{4}} + e^{\frac{-j\pi}{4}})z^{-1} + 1 = z^{-2} - \sqrt{2}z^{-1} + 1$$

Vervolgens bepalen we $H_1(z) = H(z)/H_0(z)$. Met behulp van een staartdeling vinden we dan $H_1(z) = z^{-2} - z^{-1} + 1$ (sorry, ik weet niet hoe je een staartdeling in LaTeX typeset):

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{z^{-4} - (1+\sqrt{2})z^{-3} + (2+\sqrt{2})z^{-2} - (1+\sqrt{2})z^{-1} + 1}{z^{-2} - z^{-1} + 1} \\ &= z^{-2} + \frac{-z^{-3} + (1+\sqrt{2})z^{-2} - (1+\sqrt{2})z^{-1} + 1}{z^{-2} - z^{-1} + 1} \\ &= z^{-2} - z^{-1} + \frac{z^{-2} - \sqrt{2}z^{-1} + 1}{z^{-2} - z^{-1} + 1} \\ &= z^{-2} - z^{-1} + 1 \end{aligned}$$

Inderdaad is $H_1(z)$ een polynoom in z^{-1} en dus zelf een systeemfunctie. We mogen dus inderdaad conluderen dat $z_0 = e^{\frac{j\pi}{4}}$ en $z_1 = e^{\frac{-j\pi}{4}}$ nulpunten van $H(z)$ zijn en dat het filter het signaal $x[n] = \frac{1}{2}(z_0^n + z_1^n)$ inderdaad volledig verwijderd.
(c) We moeten nu de nulpunten van $H_1(z)$ uit onderdeel (b) bepalen. $H_1(z)$ is een polynoom van de tweede graad, dus deze kunnen we eenvoudig oplossen met de abc-formule.

$$z_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm j\pi/3}.$$

Dus de frequenties $\hat{\omega}_2 = e^{j\pi/3}$ en $\hat{\omega}_3 = e^{-j\pi/3}$ worden door het filter ook verwijderd (met andere woorden het signaal $y[n] = \cos(n\pi/3)$.

(d) Deze vraag kan beantwoord worden via twee methoden. Ik zal beide oplossingen tonen:

- Via de constructie van een polynoom met de juiste nulpunten. De nulpunten zijn $z_0 = 1$, $z_1 = e^{-j\pi/8}$ en $z_1 = e^{j\pi/8}$. De gevraagde systeemfunctie is dan $H(z) = (1 - z_0 z^{-1})(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 - e^{-j\pi/8} z^{-1})(1 - e^{j\pi/8} z^{-1})$. Na uitwerken van de haakjes en het gebruik maken van de formule van Euler vindt je dan $H(z) = -z^{-3} + (1 + 2\cos(\frac{\pi}{8})z^{-2} - (1 + 2\cos(\frac{\pi}{8})z^{-1} + 1$.
- Een running average filter over $2 \times 8 = 16$ samples zal het signaal $x_0[n] = \cos(n\pi/8)$ volledig verwijderen. Tevens zal het FIR-filter $y[n] = x[n] - x[n-1]$ het constante deel van het signaal verwijderen. De samenstelling van deze twee filters levert dus het gewenste resultaat. De impulsrepons van de samenstelling is:

  $$\frac{1}{16}\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\} * \{1,-1\} = \frac{1}{16}\{1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1\}.$$

  De bijbehorende systeemfunctie is dus $H(z) = \frac{1}{16} - \frac{z^{-16}}{16}$.

Merk op dat de methoden verschillende antwoorden opleveren. De eerste methode verwijdert precies de gevraagde frequenties, terwijl elke andere frequentie niet volledig wordt verwijderd. De tweede methode verwijdert de gevraagde frequenties ook, maar tevens worden een aantal andere frequenties verwijderd (het polynoom heeft maximaal 16 nulpunten).

(e) De systeemfunctie van de identiteit (het 'FIR-filter' $y[n] = x[n]$) is $H(z) = 1$. Als G de inverse van F is, dan moet de systeemfunctie van het samengestelde systeem dus $H(z) = 1$ zijn. De systeemfunctie van de cascade (achter elkaar schakelen) van twee FIR-filters is het product van de systeemfuncties van de onderdelen, m.a.w. $H(z) = H_G(z)H_F(z)$ waarbij $H_F(z)$ de systeemfunctie van F is en $H_G(z)$ de systeemfunctie van G. Wegens $H(z) = 1$ moet dus gelden $H_G(z) = 1/H_F(z)$, maar dat betekent dat $H_G(z)$ geen polynoom in z^{-1} is als $H_F(z)$ dat wel is. M.a.w. $H_G(z)$ is geen valide systeemfunctie en G is dus geen FIR-filter.